

# FIBRÉ DE TANGO PONDÉRÉ GÉNÉRALISÉ DE RANG $N - 1$ SUR L'ESPACE $\mathbb{P}^N$

MOHAMED BAHTITI

**RÉSUMÉ.** Nous étudions dans cet article une nouvelle famille de fibrés vectoriels algébriques stables de rang  $n - 1$  sur l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n$  dont les fibrés de Tango pondérés de Cascini [4] font partie. Nous montrons que cette famille est invariante par rapport aux déformations miniversales.

**ABSTRACT.** We study in this paper a new family of stable algebraic vector bundles of rank  $n - 1$  on the complex projective space  $\mathbb{P}^n$  whose weighted Tango bundles of Cascini [4] belongs to. We show that these bundles are invariant under a miniversal deformation.

*Date:* August, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification. 14D20, 14J60, 14F05, 14D15.

Mots-clés. fibré de Tango, stabilité, déformation miniversale, espace de Kuranishi.

Key words. Tango bundles, stability, miniversal deformation, Kuranishi space.

## 1. Introduction

Les fibrés vectoriels algébriques non-décomposables connus de rang  $n - 1$  sur l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n$  pour  $n \geq 6$  sont rares. Les familles de fibrés vectoriels connues sont seulement la famille de fibrés instantons de rang  $n - 1$  pour  $n$  impair [22] et celle de fibrés de Tango pondérés de rang  $n - 1$  [4].

La famille de fibrés de Tango présente un sujet intéressant dans la géométrie algébrique. Cette famille de fibrés a été construite sur  $\mathbb{P}^n$  par Tango [23]. Horrocks [12] a introduit une technique de construction de nouveau fibré à partir d'un ancien fibré muni d'une action de  $\mathbb{C}^*$ . Cette technique a été appelée l'image inverse généralisée qui a été étudiée attentivement par Ancona et Ottaviani [1]. En utilisant cette technique Cascini [4] a généralisé le fibré de Tango, qui est  $SL(2)$ -invariant, à un fibré de Tango pondéré.

Dans cet article nous nous intéressons en particulier à la généralisation du fibré de Tango qui est  $\mathbb{C}^*$ -invariant. Plus précisément, soient  $i, n, \alpha, \gamma \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{Z}$  tels que  $n > 2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha \geq \beta$ ,  $\alpha + \beta \geq 0$  et  $\gamma + n\alpha + i(\beta - \alpha) > 0$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Soient  $Q$  le fibré de quotient et  $F(W)$  le fibré de Tango sur  $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  pour un  $W \in \mathcal{W}$ , et  $D$  comme dans le théorème 3.4. Alors le fibré  $Q$  (resp.  $F(W)$ ) a une image inversée généralisée  $Q_{\gamma, \alpha, \beta}$  (resp.  $F_{\gamma, \alpha, \beta}$ ) définie par la suite

exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha)) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha)) \longrightarrow \mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}(\gamma) \longrightarrow 0),$$

où  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}(\gamma) := F_{\gamma,\alpha,\beta}(-2\gamma)$ ,  $\mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} := Q_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma)$ . On appelle le fibré  $\mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta}$  le *fibré de quotient pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$ , provenant d'une image inverse généralisée sur  $\mathbb{P}^n$* . On appelle le fibré  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  le *fibré de Tango pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$ , provenant d'une image inverse généralisée sur  $\mathbb{P}^n$* . En particulier le fibré  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,-\alpha}$  pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, -\alpha$  est le fibré pondéré par les poids  $\gamma, \alpha$  de Cascini [4].

Le fibré  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  sur  $\mathbb{P}^n$  vérifie les conditions suivantes (théorème 4.1)

- 1- Si on a  $\gamma > 2n\alpha + (\beta - \alpha)$ , alors  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  est stable.
- 2- Soit  $\gamma > n\alpha$ . Si  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  est stable, alors on a  $\gamma > 2n\alpha + (\beta - \alpha)$ .

Les déformations miniversales d'un tel fibré  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  sont encore des fibrés de Tango pondérés par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$  et l'espace de Kuranishi du fibré  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  est lisse au point correspondant de  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$  (théorème 4.9).

Je tiens à exprimer ma gratitude au directeur de ma thèse M. J-M. Drézet et au professeur G. Ottaviani pour nos discussions utiles. Je remercie également toutes les personnes qui ont contribué à m'aider à réaliser mes travaux. Cet article fait partie de ma thèse.

## 2. Préliminaires

2.1. **Remarque.** Si  $D$  est un espace vectoriel de dimension 1 et  $q$  un entier, on note

$$D^q = \begin{cases} D \otimes D \otimes \dots \otimes D \otimes D \text{ (q fois)} & : q > 0 \\ \mathbb{C} & : q = 0 \\ D^* \otimes D^* \otimes \dots \otimes D^* \otimes D^* \text{ (-q fois)} & : q < 0. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S}^q D = \begin{cases} \mathcal{S}^q D & : q > 0 \\ \mathbb{C} & : q = 0 \\ \mathcal{S}^{-q} D^* & : q < 0. \end{cases}$$

Même chose pour un fibré vectoriel sur une variété  $X$ . On a donc, pour tout entier  $q$  et  $x = \mathbb{C}.v \in P^n = P(V)$ ,

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))_x = x^{-q} = (\mathbb{C}.v)^{-q}.$$

On peut dire que  $v^* := v^{-1}$  est le vecteur dual de  $v$ . On peut donc définir  $v^{-q} \in (\mathbb{C}.v)^{-q} \subset \mathcal{S}^{-q} V$  pour tout entier  $q$ .

2.2. **Définition de l'image inversée généralisée d'un fibré (transformation de Horrocks [12]).** Soient  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n + 1$  et  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de  $V$ . Soient

$$\eta : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

la projection, et  $T$  une  $\mathbb{C}^*$ -action triviale (la multiplication usuelle) sur  $V \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^* \times V \setminus \{0\} &\longrightarrow V \setminus \{0\} \\ (t, v) &\longmapsto t.v = tv. \end{aligned}$$

L'action  $T$  induit une action triviale de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}(V)$  telle que  $\eta$  est  $\mathbb{C}^*$ -équivariant et que

$$\mathbb{P}(V) \simeq (V \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*.$$

Soit  $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(V))$  la catégorie de fibrés vectoriels sur  $\mathbb{P}(V)$ . Soit  $\mathcal{FV}(V \setminus \{0\}, T)$  la catégorie de fibrés vectoriels sur  $V \setminus \{0\}$  qui sont  $\mathbb{C}^*$ -invariants au-dessus de l'action de  $T$  sur  $V \setminus \{0\}$ , ses morphismes étant des morphismes  $\mathbb{C}^*$ -équivariants des fibrés (les morphismes étant compatibles avec l'action  $T$ ). Pour tout fibré  $E \in \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V))$ , pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$  et  $v \in V \setminus \{0\}$ , on a

$$(\eta^* E)_v = E_{\eta(v)} \simeq E_{t.\eta(v)} = E_{\eta(T(t).v)} = (\eta^* E)_{T(t).v}.$$

Donc on obtient un foncteur de catégories

$$\begin{aligned} \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V)) &\xrightarrow{\eta^*(\bullet)} \mathcal{FV}(V \setminus \{0\}, T) \\ E &\longmapsto \eta^* E. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout fibré  $F \in \mathcal{FV}(V \setminus \{0\}, T)$ , il existe un fibré  $E \in \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V))$  tel que l'on ait un  $\mathbb{C}^*$ -isomorphisme  $F \simeq \eta^* E$ . Par exemple, pour tout entier  $q$  et pour tout  $v \in V \setminus \{0\}$ , on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} \eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))_v$$

$$t \longmapsto t.v^{-q}.$$

Cela définit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{V \setminus \{0\}} \xrightarrow{\cong} \eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q)).$$

Le fibré  $\eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))$  a une action canonique de  $\mathbb{C}^*$  compatible avec l'action de ce groupe sur  $V \setminus \{0\}$ . Compte tenu de l'isomorphisme précédent, c'est une action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathcal{O}_{V \setminus \{0\}}$ . Cette action est la suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathcal{O}_{V \setminus \{0\}} &= \mathbb{C}^* \times (V \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) \longrightarrow V \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \\ (t, (u, a)) &\longmapsto (tu, t^q a) \end{aligned}$$

Autrement dit, cette action est la multiplication de l'action triviale de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathcal{O}_{V \setminus \{0\}}$  par le caractère  $t^q$ . Donc  $\eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))$  est le fibré trivial sur  $V \setminus \{0\}$  muni de l'action précédente.

Cette correspondance est compatible avec les opérations habituelles sur les fibrés. Par exemple, si on considère que  $F$  (resp.  $F^*$ ) est  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $T$  (resp.  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $\hat{T}$  qui est l'action duale de  $T$ ), alors on a  $\eta^*(E^*) = F^*$ . Même chose pour les produits tensoriels (resp. extérieurs, symétriques), la somme directe,  $Hom(,)$  et une suite exacte (resp. une monade) de fibrés vectoriels de trois termes.

Soient  $g_0, g_1, \dots, g_n$  des polynômes homogènes de degrés  $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n$  respectivement sans zéro commun sur  $\mathbb{P}(V_2)$ . On a l'application surjective

$$\begin{aligned} \omega &:= (g_0, g_1, \dots, g_n) : V_1 \setminus \{0\} \longrightarrow V_2 \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (g_0(v), g_1(v), \dots, g_n(v)) \end{aligned}$$

où  $V_1 = \mathbb{C}^{n+1}$  et  $V_2$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n+1$ . Soit  $\eta_i : V_i \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V_i)$  la projection pour  $i = 1, 2$ . On considère l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $V_2$

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* &\longrightarrow GL(V_2) \\ t &\longmapsto \sigma(t) \end{aligned}$$

où

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^{d_0} & & & & \\ & t^{d_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{d_{n-1}} & \\ 0 & & & & t^{d_n} \end{pmatrix},$$

et on considère une  $\mathbb{C}^*$ -action  $T$  qui est la multiplication usuelle sur  $V_1 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^* \times V_1 \setminus \{0\} &\longrightarrow V_1 \setminus \{0\} \\ (t, v) &\longmapsto T(t, v) = t.v \end{aligned}$$

de telle sorte que  $\eta_i$  est un  $\mathbb{C}^*$ -morphisme. Alors  $\omega$  est une  $\mathbb{C}^*$ -application par rapport à ces deux actions. L'action  $\sigma$  induit une action  $\bar{\sigma} \in PGL(V_2)$  de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}(V_2)$  et l'action  $T$  induit une action triviale de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}(V_1)$ . On obtient donc le  $\mathbb{C}^*$ -diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} V_1 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\omega} & V_2 \setminus \{0\} \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 \\ \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_1) & & \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_2) \end{array}$$

Soit  $F$  un fibré vectoriel sur  $\mathbb{P}(V_2)$  qui est  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $\bar{\sigma}$ . Donc  $\eta_2^* F$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $\sigma$ . Alors  $\omega^* \eta_2^* F$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action usuelle de  $\mathbb{C}^*$  sur  $V_1 \setminus \{0\}$ . Autrement dit, pour tout  $v \in V_1 \setminus \{0\}$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a

$$(\omega^* \eta_2^* F)_v = F_{\eta_2(\omega(v))} \simeq F_{\sigma(t) \cdot \eta_2(\omega(v))} = F_{\eta_2(\sigma(t) \cdot \omega(v))} = (\eta_2^* F)_{\sigma(t) \cdot \omega(v)} = (\eta_2^* F)_{\omega(t \cdot v)} = (\omega^* \eta_2^* F)_{t \cdot v}.$$

Alors il existe un fibré vectoriel  $F_{f_0, f_1, \dots, f_n}$  sur  $\mathbb{P}(V_1)$  tel que l'on ait un  $\mathbb{C}^*$ -isomorphisme

$$\omega^* \eta_2^* F \simeq \eta_1^* F_{f_0, f_1, \dots, f_n}.$$

On appelle  $F_1 := F_{f_0, f_1, \dots, f_n}$  l'image inverse généralisée de  $F$ . Donc on a le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_2), \bar{\sigma}) & \xrightarrow{\mathbf{Iminvg}} & \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_1)) \\ F & \longmapsto & F_1 \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_2), \bar{\sigma}) & \xrightarrow{\omega^* \eta_2^*(\bullet)} & \mathcal{FV}(V_1 \setminus \{0\}, T) \\ & \searrow \mathbf{Iminvg} \quad \nearrow \eta_1^*(\bullet) & \\ & \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_1)) & \end{array}$$

où  $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_2), \bar{\sigma})$  est la catégorie de fibrés vectoriels sur  $\mathbb{P}(V_2)$  qui sont  $\mathbb{C}^*$ -invariants au-dessus de l'action  $\bar{\sigma}$ , et les morphismes sont des morphismes  $\mathbb{C}^*$ -équivalents des fibrés (les morphismes étant compatibles avec l'action  $\bar{\sigma}$ ).

Cette *transformation de Horrocks* **Iminvg** est compatible avec les opérations habituelles sur les fibrés. Par exemple, si on considère que  $F$  (resp.  $F^*$ ) est  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $\bar{\sigma}$  (resp.  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $\widehat{\bar{\sigma}}$  qui est l'action duale de  $\bar{\sigma}$ ), alors on a **Iminvg**( $F^*$ ) = **Iminvg**( $F$ )<sup>\*</sup>. Même chose pour les produits tensoriels (resp. extérieurs, symétriques), la somme directe,  $Hom(,)$  et une suite exacte (resp. une monade) de fibrés vectoriels de trois termes.

**2.3. Proposition.** *On considère les mêmes notations de la définition 2.2. Soient  $E$  un  $\mathbb{C}^*$ -fibré quelconque sur  $\mathbb{P}(V_2)$ ,  $s : \mathbb{C}^* \times E \longrightarrow E$  son  $\mathbb{C}^*$ -action au-dessus de l'action  $\bar{\sigma}$  et  $q$  un entier. On en déduit une nouvelle action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $E$ , pour tout  $x \in \mathbb{P}(V_2)$ ,*

$$\begin{aligned} s_{q,x} : \mathbb{C}^* \times E_x &\longrightarrow E_x \\ (t, u) &\longmapsto t^q \cdot s_x(t, u) \end{aligned}$$

(multiplication de l'action par le caractère  $t^q$ ). On note le  $\mathbb{C}^*$ -fibré obtenu  $E^{(q)} = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}$ . Alors on a

1- **Iminvg**( $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)$ ) =  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(q)$ , pour tout entier  $k$ .

2- **Iminvg**( $E^{(q)}$ ) = (**Iminvg**( $E$ ))( $q$ ).

*Démonstration.* 1- On a **Iminvg**( $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)$ ) =  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d)$ , où  $d$  est un entier. C'est-à-dire

$$\omega^* \eta_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)) \simeq \eta_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d).$$

On a, pour tout  $x = \mathbb{C}.v_2 \in \mathbb{P}(V_2)$ , un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mu_{v_2} : \mathcal{O}_{V_2 \setminus \{0\}, v_2} &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\cdot v_2^{-k}} \eta_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k))_{v_2} \simeq (\mathbb{C}v_2)^{-k} \subset \mathcal{S}^{-k} V_2 \\ a &\longmapsto a.v_2^{-k}. \end{aligned}$$

On a aussi, pour tout  $x = \mathbb{C}.v_1 \in \mathbb{P}(V_1)$ , un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{v_1} : \mathcal{O}_{V_1 \setminus \{0\}, v_1} &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\cdot v_1^{-d}} \eta_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d))_{v_1} \simeq (\mathbb{C}.v_1)^{-d} \subset \mathcal{S}^{-d} V_1 \\ a &\longmapsto a.v_1^{-d}. \end{aligned}$$

On a, pour tout  $v \in V_1$ , un isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}\omega(v))^{-k} &\simeq (\omega^* \eta_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k))_v \simeq (\eta_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d))_v \simeq (\mathbb{C}.v)^{-d} \\ a.(\omega(v))^{-k} &\longmapsto a.(v)^{-d}. \end{aligned}$$

Alors on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{t^q} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow (\omega(v))^{-k} & & \downarrow (\omega(t.v))^{-k} \\ (\mathbb{C}\omega(v))^{-k} & \xrightarrow{s_{q,v}} & (\mathbb{C}\omega(t.v))^{-k} \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{C}.v)^{-d} & \longrightarrow & (\mathbb{C}.v)^{-d} \simeq (\mathbb{C}.(t.v))^{-d} \end{array}$$

$v^{-d}$    $(t.v)^{-d}$

tel que  $a.(v)^{-d} = a.t^q(t.v)^{-d} := a.t^{q-d}(v)^{-d}$ , où  $a \in \mathbb{C}^*$ . Par conséquent  $d = q$  et on obtient

$$\mathbf{Iminvg}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(q).$$

2- Comme  $E^{(q)} = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}$  et que le foncteur **Iminvg** respecte le produit tensoriel, on obtient

$$\mathbf{Iminvg}(E^{(q)}) = \mathbf{Iminvg}(E) \otimes \mathbf{Iminvg}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}).$$

D'après (1), on a  $\mathbf{Iminvg}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(q)$ . On en déduit donc

$$\mathbf{Iminvg}(E^{(q)}) = \mathbf{Iminvg}(E)(q).$$

□

### 3. Fibré de Tango pondéré généralisé

Le fibré de Tango, qui est  $SL_2(\mathbb{C})$ -invariant, et son fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur  $\mathbb{P}^n$  ont déjà été traités dans l'article [4]. Nous allons traiter le fibré de Tango, qui est  $\mathbb{C}^*$ -invariant, et son fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur  $\mathbb{P}^n$ .

**3.1. Définition.** (Jaczewski, Szurek, Wisniewski [8] et Tango [23]). Soient  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $\dim(V) = n + 1$ , et  $\mathbb{P}^n = P(V)$  l'espace projectif complexe associé à l'espace  $V$ . Soit  $W \subset \bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$  un sous-espace vectoriel tel que

$$(*) \begin{cases} - \dim(W) = \binom{n+1}{2} - 2n + 1 \\ - W \text{ ne contient pas d'élément décomposable non nul de } \bigwedge^2 V. \end{cases}$$

En utilisant la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\mu} Q \longrightarrow 0,$$

on obtient la résolution suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2) \xrightarrow{g \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)}} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{I_V \wedge g} \bigwedge^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\bigwedge^2 \mu} \bigwedge^2 Q \longrightarrow 0.$$

Donc on en déduit la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\beta} \bigwedge^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\bigwedge^2 \mu} \bigwedge^2 Q \longrightarrow 0,$$

où  $I_V \wedge g = \beta \circ (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)})$ . On a le morphisme d'évaluation du fibré  $Q^*(1)$

$$ev_{Q^*(1)} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \otimes \bigwedge^2 V \longrightarrow Q^*(1).$$

Il en découle que  $\beta =^T ev_{Q^*(1)}$ . Pour tout  $x = \mathbb{C}.v_0 \in \mathbb{P}^n$  et  $v_0 \in V$ , on a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \bigwedge^2 V & \xrightarrow{q} & (\bigwedge^2 V)/W \longrightarrow 0 \\ & & & & \uparrow \beta_x & \nearrow (\varpi_W)_x & \\ & & & & Q_x(-1) & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

L'application  $(\varpi_W)_x = q \circ \beta_x$  est injective car:

soit  $(\varpi_W)_x(a) = 0$ , pour tout  $a \in Q_x(-1)$ , on obtient que  $\beta_x(a) \in W$ . Il existe également  $v \in V$  tel que

$$a = (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)})_x(v \otimes x) = \mu_x(v) \otimes v_0.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} (\beta \circ (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)}))_x(v \otimes x) &= (I_V \wedge g)_x(v \otimes x), \\ \beta_x(a) &= v \wedge g_x(x) = v \wedge v_0. \end{aligned}$$

Comme  $W$  ne contient pas d'élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 V$ , alors on obtient  $\beta_x(a) = 0$  qui donne  $a = 0$ . On définit le fibré de Tango  $F(W)$  de rang  $n - 1$  sur  $\mathbb{P}^n$  par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left( \left( \bigwedge^2 V \right) / W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Sa première classe de Chern est  $c_1 = 2n$  et  $H^0(F(W)(1)) = (\bigwedge^2 V) / W$ . On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} ((\bigwedge^2 V) / W)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{T\varpi_W} & Q^*(1) \\ \downarrow & & \parallel \\ (\bigwedge^2 V)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{ev_{Q^*(1)}} & Q^*(1). \end{array}$$

On en déduit immédiatement que l'inclusion  ${}^Tq : ((\bigwedge^2 V) / W)^* \subset (\bigwedge^2 V)^*$  s'identifie à  $H^0({}^T\varpi_W)$ . De la troisième suite exacte, il découle la suite de cohomologies suivante

$$\begin{aligned} H^0((F(W)(1))^*) &= \text{Hom}(F(W)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \text{Hom}\left(\left(\bigwedge^2 V\right) / W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\right) \xrightarrow{H^0({}^T\varpi_W)} \\ &\text{Hom}(Q(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \text{Ext}^1(F(W)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc on a  $H^0((F(W)(1))^*) = 0$  et  $H^1((F(W)(1))^*) = \text{Ext}^1(F(W)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = W^*$ .

**3.2. Proposition.** Soit  $\bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$ . On a les assertions suivantes

1- Soient  $W_1, W_2$  des sous-espaces vectoriels de  $\bigwedge^2 V$  vérifiant la condition (\*). Alors on obtient  $F(W_1) \simeq F(W_2)$  si et seulement si on a  $W_1 = W_2$ .

2- Soient  $\sigma \in GL(V)$  et  $\bar{\sigma} \in PGL(V)$  son élément correspondant. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\bigwedge^2 V$  vérifiant la condition (\*). Alors  $\sigma^{-1}(W)$  est un sous-espace vectoriel de  $\bigwedge^2 V$  vérifiant la condition (\*) et il existe un isomorphisme canonique

$$\Psi_{\sigma}^W : \bar{\sigma}^*(F(W)) \xrightarrow{\simeq} F(\sigma^{-1}(W)).$$

Soient  $\rho \in GL(V)$  et  $\bar{\rho} \in PGL(V)$  son élément correspondant, alors on a

$$\Psi_{\sigma\rho}^W = \Psi_{\rho}^{\sigma^{-1}(W)} \circ \bar{\rho}^* \Psi_{\sigma}^W.$$

En particulier, pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ , soient

$$\sigma(t) = \rho(t) := \begin{pmatrix} t^{a_0} & & & & \\ & t^{a_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{a_{n-1}} & \\ 0 & & & & t^{a_n} \end{pmatrix} \in GL(V)$$



et  $\overline{\sigma(t)}, \overline{\rho(t)} \in PGL(V)$  leurs éléments correspondants tels que  $\sigma(t)(W) \subseteq W$ . Alors il existe un isomorphisme canonique

$$s_t : \overline{\sigma(t)}^* F(W) \simeq F(W)$$

tel que, pour  $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$ , on a  $s_{t_1.t_2} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^*(s_{t_1})$ . Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{\sigma(t_2)}^* \overline{\sigma(t_1)}^* F(W) = \overline{\sigma(t_1.t_2)}^* F(W) & \xrightarrow{s_{t_1.t_2}} & F(W) \\ & \searrow \overline{\sigma(t_2)}^*(s_{t_1}) & \nearrow s_{t_2} \\ & \overline{\sigma(t_2)}^* F(W) & \end{array}$$

*Démonstration.* 1- Pour  $W_1, W_2$  des sous-espaces vectoriels de  $\bigwedge^2 V$  vérifiant la condition (\*), on a les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_{W_1}} \left( \left( \bigwedge^2 V \right) / W_1 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{b_1} F(W_1)(1) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_{W_2}} \left( \left( \bigwedge^2 V \right) / W_2 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{b_2} F(W_2)(1) \longrightarrow 0.$$

Soit  $\varphi : F(W_1)(1) \simeq F(W_2)(1)$ . On déduit de la deuxième suite

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}\left(\left(\bigwedge^2 V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, Q(-1)\right) \longrightarrow \\ &\text{Hom}\left(\left(\bigwedge^2 V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \left(\bigwedge^2 V\right)/W_2\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{b_2 \circ \bullet} \\ &\text{Hom}\left(\left(\bigwedge^2 V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, F(W_2)(1)\right) \longrightarrow \text{Ext}^1\left(\left(\bigwedge^2 V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, Q(-1)\right) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme  $H^1(Q(-1)) = 0$ , alors le morphisme  $b_2 \circ \bullet$  est surjectif. Donc pour le morphisme  $\varphi \circ b_1$  il existe un morphisme

$$H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} : \left( \left( \bigwedge^2 V \right) / W_1 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \left( \left( \bigwedge^2 V \right) / W_2 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$$

tel que  $b_2 \circ (H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}) = \varphi \circ b_1$ . Comme  $\varphi$  est un isomorphisme, alors  $H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}$  est aussi un isomorphisme lequel définit un isomorphisme  $\varphi_2 : Q(-1) \longrightarrow Q(-1)$  qui est une homothétie car le fibré  $Q$  est simple. Donc on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\varpi_{W_1}} & ((\wedge^2 V)/W_1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & F(W_1)(1) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \wr H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} & & \downarrow \wr \varphi \\
0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\varpi_{W_2}} & ((\wedge^2 V)/W_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & F(W_2)(1) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

En considérant la cohomologie de ce diagramme, on obtient

$$\begin{array}{ccccc}
Hom((\wedge^2 V)/W_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_2})} & Hom(Q(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & Ext^1(F(W_2)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\
\downarrow \wr T H^0(\varphi) & & \parallel & & \downarrow \wr T H^1(\varphi) \\
Hom((\wedge^2 V)/W_1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_1})} & Hom(Q(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & Ext^1(F(W_1)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})
\end{array}$$

Donc on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & ((\wedge^2 V)/W_2)^* & \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_2})} & (\wedge^2 V)^* & \longrightarrow & (W_2)^* \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow T H^0(\varphi) & & \parallel & & \downarrow T H^1(\varphi) \\
0 & \longrightarrow & ((\wedge^2 V)/W_1)^* & \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_1})} & (\wedge^2 V)^* & \longrightarrow & (W_1)^* \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Comme  $H^0(T\varpi_{W_1}), H^0(T\varpi_{W_2})$  sont les inclusions naturelles, alors les sous-espaces vectoriels  $((\wedge^2 V)/W_1)^*$  et  $((\wedge^2 V)/W_2)^*$  de  $(\wedge^2 V)^*$  sont égaux et donc  $W_1 = W_2$ .

2- Soient  $\sigma \in GL(V)$  et  $\bar{\sigma} \in PGL(V)$  son élément correspondant. Alors on obtient que  $\dim(W) = \dim(\sigma^{-1}(W))$  et que  $\sigma^{-1}(W)$  ne contient pas d'élément décomposable non nul de  $\wedge^2 V$ . Car si  $\sigma^{-1}(W)$  contient  $\sigma^{-1}(y) \wedge \sigma^{-1}(z) = \sigma^{-1}(y \wedge z)$  qui est un élément non nul, alors  $W$  contient  $y \wedge z$  qui est un élément non nul; ce qui est une contradiction. On a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \bar{\sigma}^* Q(-1) \xrightarrow{\bar{\sigma}^* \varpi_W} \bar{\sigma}^* \left( \left( (\wedge^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \right) \xrightarrow{\bar{\sigma}^* b} \bar{\sigma}^* F(W) \longrightarrow 0.$$

Comme on a, pour tout  $x = \mathbb{C}.v \in \mathbb{P}^n$  où  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned}
& \bar{\sigma}^* \left( \left( (\wedge^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \right)_x = \sigma. \left( (\wedge^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, \bar{\sigma}(x)} \\
& = \sigma. \left( (\wedge^2 V)/W \right) = (\wedge^2 V)/\sigma^{-1}(W) = \left( \left( (\wedge^2 V)/\sigma^{-1}(W) \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \right)_x,
\end{aligned}$$

alors on obtient

$$0 \longrightarrow \bar{\sigma}^* Q(-1) \xrightarrow{\bar{\sigma}^* \varpi_W} \left( (\wedge^2 V)/\sigma^{-1}(W) \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\bar{\sigma}^* b} \bar{\sigma}^* F(W) \longrightarrow 0.$$

Comme le fibré  $Q$  est homogène, alors on a

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\bar{\sigma}^* \varpi_W} \left( (\bigwedge^2 V) / \sigma^{-1}(W) \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\bar{\sigma}^* b} \bar{\sigma}^* F(W) \longrightarrow 0.$$

Comme on a  $\sigma^* \varpi_W = \varpi_{\sigma^{-1}(W)}$ , alors on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\bar{\sigma}^* \varpi_W} & ((\bigwedge^2 V) / \sigma^{-1}(W)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & \bar{\sigma}^* F(W) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\varpi_{\sigma^{-1}(W)}} & ((\bigwedge^2 V) / \sigma^{-1}(W)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & F(\sigma^{-1}(W)) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ce qui implique qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\Psi_{\sigma}^W : \bar{\sigma}^*(F(W)) \xrightarrow{\simeq} F(\sigma^{-1}(W)).$$

Soient  $\rho \in GL(V)$  et  $\bar{\rho} \in PGL(V)$  son élément correspondant. Alors on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{\rho}^* \bar{\sigma}^* F(W) = (\bar{\sigma} \circ \bar{\rho})^* F(W) & \xrightarrow{\Psi_{\sigma \circ \rho}^W} & F((\sigma \circ \rho)^{-1}(W)) \\ \bar{\rho}^*(\Psi_{\sigma}^W) \downarrow & & \parallel \\ \bar{\rho}^* F(\sigma^{-1}(W)) & \xrightarrow{\Psi_{\rho}^{\sigma^{-1}(W)}} & F(\rho^{-1}(\sigma^{-1}(W))) = F((\sigma \circ \rho)^{-1}(W)). \end{array}$$

Comme on a  $\sigma(t)(W) \subseteq W$  alors on en déduit  $\sigma(t)^{-1}(W) = W$ , pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ , et il existe un isomorphisme canonique

$$s_t : \overline{\sigma(t)}^* F(W) \simeq F(W).$$

Comme  $\sigma(t_1) \cdot \sigma(t_2) = \sigma(t_1 \cdot t_2)$ , alors on a

$$s_{t_2 \cdot t_1} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^* (s_{t_1})$$

pour tout  $t_2, t_1 \in \mathbb{C}^*$ , tout en considérant  $\sigma(t) = \rho(t)$  dans le carré commutatif précédent.  $\square$

**3.3. Remarque.** Soient  $U$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2,  $\{x, y\}$  sa base et  $n > 2$  un entier. Soit

$$\mathcal{B}_0 := \{v_p := x^{n-p} y^p, \ 0 \leq p \leq n\}$$

la base de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}^n U$ . On définit l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathcal{S}^n U$  par

$$\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

où  $\alpha, \beta$  sont des entiers; cette action agit sur  $v_p$  comme suit

$$\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot v_p = t^{n\alpha + p(\beta - \alpha)} \cdot v_p.$$

Soit

$$\mathcal{B} := \{z_{p,q} := x^{n-p} y^p \wedge x^{n-q} y^q, \ 0 \leq p < q \leq n\}$$

la base de l'espace vectoriel  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ . On définit l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$  par l'action précédente de  $\mathbb{C}^*$  qui agit sur  $z_{p,q}$  comme suit

$$\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot z_{p,q} = t^{2n\alpha+(p+q)(\beta-\alpha)} \cdot z_{p,q}.$$

Soient  $k$  un entier avec  $1 \leq k \leq 2n-1$  et  $E_k$  le sous-espace vectoriel de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$  tels que

$$\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot u = t^{2n\alpha+k(\beta-\alpha)} \cdot u,$$

pour tout  $u \in E_k$ . Alors on obtient

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} E_k,$$

où  $E_k$  est engendré par les éléments  $z_{p,q}$  tels que  $k = p + q$ .

**3.4. Théorème.** *On utilise les mêmes notations de la remarque 3.3. Soit  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  l'espace projectif associé à l'espace vectoriel  $\mathcal{S}^n U$ .*

1- *Soit  $\mathcal{W}$  l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels  $W \subset \bigwedge^2(\mathcal{S}^n U)$  tels que  $W$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant et vérifie la condition (\*). Alors il existe un ensemble  $\mathcal{Z}_k \subset \mathbb{P}(E_k^*)$  non vide pour tout entier  $k$  avec  $3 \leq k \leq 2n-3$  tel que*

$$\mathcal{W} = \left\{ \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k \mid W_k \in \mathcal{Z}_k, \ 3 \leq k \leq 2n-3 \right\}.$$

2- *Soit  $W \in \mathcal{W}$ . Alors il existe un sous-espace vectoriel  $D_W \subset \bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$  tel que  $D_W$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant et vérifie que*

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \simeq D_W \oplus W$$

*est un  $\mathbb{C}^*$ -isomorphisme. De plus on a la suite exacte suivante*

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

*où  $F(W)$  est le fibré de Tango associé au sous-espace  $W$ .*

*Démonstration.* 1- Soit

$$\mathcal{B} := \{z_{p,q} := x^{n-p}y^p \wedge x^{n-q}y^q, \ 0 \leq p < q \leq n\}$$

la base de l'espace vectoriel  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ . Dans la remarque 3.3, on a vu

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} E_k,$$

où  $E_k$  est engendré par les éléments  $z_{p,q}$  tels que  $k = p + q$ . On va démontrer, pour tout  $u \in E_k$ , que  $u$  est décomposable si et seulement s'il existe un entier  $\max(k-n, 0) \leq p \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  et  $\varepsilon \in \mathbb{C}$

tels que  $u = \varepsilon \cdot z_{p,k-p}$ . Notons  $\{z_{p,k-p} \wedge z_{q,k-q}\}_{\max(k-n,0) \leq p < q \leq [\frac{k-1}{2}]}$  la base de l'image de  $E_k \times E_k$  dans  $\bigwedge^4 \mathcal{S}^n U$  par le morphisme canonique suivant

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \times \bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \longrightarrow \bigwedge^4 \mathcal{S}^n U.$$

Si  $u = \sum_{\max(k-n,0) \leq p \leq [\frac{k-1}{2}]} a_p \cdot z_{p,k-p}$ , alors on obtient

$$u \wedge u = 2 \sum_{\max(k-n,0) \leq p < q \leq [\frac{k-1}{2}]} a_p \cdot a_q \cdot z_{p,k-p} \wedge z_{q,k-q}.$$

Si  $u \wedge u = 0$ , on obtient que  $a_p \cdot a_q = 0$  pour tout  $\max(k-n,0) \leq p < q \leq [\frac{k-1}{2}]$ . Donc il existe  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  tel que  $u = \varepsilon \cdot z_{p,k-p}$ . Il en découle, pour tout  $1 \leq k \leq 2n-1$ , que la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $E_k$  ne contenant aucun élément décomposable non nul est  $\dim(E_k) - 1$  et que de tels sous-espaces existent. Plus précisément, pour tout  $1 \leq k \leq 2n-1$  et pour tout entier  $p$  tel que

$$\max(k-n,0) \leq p \leq [\frac{k-1}{2}],$$

l'ensemble des hyperplans  $H \subset E_k$  tels que  $z_{p,k-p} \in H$  est un hyperplan de  $\mathbb{P}(E_k^*)$ . Cet ensemble est le fermé de Zariski de  $\mathbb{P}(E_k^*)$  suivant

$$\mathcal{J}(z_{p,k-p}) = \{H \subset E_k \mid z_{p,k-p} \in H\} \subset \mathbb{P}(E_k^*).$$

Soit  $\mathcal{D}(z_{p,k-p}) = \mathbb{P}(E_k^*) \setminus \mathcal{J}(z_{p,k-p})$ . On définit

$$\mathcal{Z}_k = \bigcap_{p=\max(k-n,0)}^{[\frac{k-1}{2}]} \mathcal{D}(z_{p,k-p})$$

qui est l'ouvert constitué de tous les sous-espaces vectoriels de  $E_k$  de dimension  $\dim(E_k) - 1$  ne contenant pas d'élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ . On a donc

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_{2n-1} = \mathcal{Z}_{2n-2} = \emptyset.$$

Soit  $W_k \in \mathcal{Z}_k$  pour tout  $3 \leq k \leq 2n-3$ . On considère le sous-espace vectoriel de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$

$$W = \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k.$$

Alors  $W$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant et

$$\dim(W) = \binom{n+1}{2} - (2n-1).$$

Il reste à démontrer que  $W$  ne contient aucun élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ . On veut démontrer que  $w = 0$ , tout en considérant que  $w \in W$  tel que  $w \wedge w = 0$ . On a

$$w = \sum_{k=3}^{2n-3} w_k, \text{ où } w_k \in W_k.$$

Donc on obtient

$$w \wedge w = 2 \sum_{i=3}^{2n-4} \left( \sum_{j=1}^{2n-3-i} w_i \wedge w_{i+j} \right) + \sum_{i=3}^{2n-3} w_i \wedge w_i.$$

L'action de  $\mathbb{C}^*$  sur un élément  $w_i \wedge w_j \in \bigwedge^4 \mathcal{S}^n U$  étant la multiplication par  $t^{4n\alpha+2(i+j)(\beta-\alpha)}$ , alors on regroupe les éléments dans  $w \wedge w$  suivant l'action de  $\mathbb{C}^*$  en mettant ensemble les éléments  $w_i \wedge w_j$  ayant le même  $i+j$ . On obtient

$$w \wedge w = \sum_{d=6}^{4n-6} g_d,$$

où

$$g_{2m} = w_m \wedge w_m + 2 \sum_{j=1}^{m-3} w_{m-j} \wedge w_{m+j}, \quad g_{2m+1} = 2 \sum_{j=0}^{m-3} w_{m-j} \wedge w_{m+1+j},$$

$$g_{2n} = w_n \wedge w_n + 2 \sum_{j=1}^{n-3} w_{n-j} \wedge w_{n+j},$$

$$g_{4n-2m} = w_{2n-m} \wedge w_{2n-m} + 2 \sum_{j=1}^{m-3} w_{2n-m-j} \wedge w_{2n-m+j},$$

$$g_{4n-2m-1} = 2 \sum_{j=0}^{m-3} w_{2n-m-j} \wedge w_{2n-m-1+j},$$

où  $3 \leq m \leq n-1$ . On a aussi, pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot (w \wedge w) &= \sum_{d=6}^{4n-6} \left( \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot g_d \right), \\ \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot (w \wedge w) &= \sum_{d=6}^{4n-6} (t^{4n\alpha+2d(\beta-\alpha)} \cdot g_d). \end{aligned}$$

Comme  $w \wedge w = 0$ , alors on a  $g_d = 0$  pour tout  $6 \leq d \leq 4n-6$ . Nous allons montrer, par la récurrence sur  $m$ , que  $w_r = 0, w_{2n-r} = 0$  pour tout  $3 \leq r \leq m$  et pour tout  $3 \leq m \leq n$ :

- Pour  $m = 3$ , on a  $g_6 = w_3 \wedge w_3 = 0$  et  $g_{4n-6} = w_{2n-3} \wedge w_{2n-3} = 0$ , ce qui entraîne que  $w_3 = w_{2n-3} = 0$ .

- Pour  $m = 4$ , on a  $g_6 = w_3 \wedge w_3 = 0$  et  $g_{4n-6} = w_{2n-3} \wedge w_{2n-3} = 0$ , ce qui entraîne que  $w_3 = w_{2n-3} = 0$ , et on obtient que  $g_8 = w_4 \wedge w_4 = 0$  et  $g_{4n-8} = w_{2n-4} \wedge w_{2n-4} = 0$ , ce qui entraîne que  $w_4 = w_{2n-4} = 0$ .

- On suppose que  $w_r = 0, w_{2n-r} = 0$  pour tout  $3 \leq r \leq m$ , et on montre que  $w_r = 0, w_{2n-r} = 0$  pour tout  $3 \leq r \leq m+1$ .

- Pour  $m+1$ , on a

$$g_{2(m+1)} = w_{m+1} \wedge w_{m+1} + 2(w_m \wedge w_{m+2} + w_{m-1} \wedge w_{m+3} + \dots + w_4 \wedge w_{2m-2} + w_3 \wedge w_{2m-1}) = 0,$$

et

$$g_{4n-2(m+1)} = w_{2n-(m+1)} \wedge w_{2n-(m+1)} + 2(w_{2n-m-2} \wedge w_{2n-m} + w_{2n-m-3} \wedge w_{2n-m+1} + \dots + w_{2n-2m+2} \wedge w_{2n-4} + w_{2n-2m+1} \wedge w_{2n-3}) = 0,$$

ce qui entraîne que  $w_{m+1} = w_{2n-(m+1)} = 0$ . Pour tout  $3 \leq r \leq m+1$ , on a alors  $w_r = w_{2n-r} = 0$ . Donc on obtient que  $w = 0$ , et que  $W$  ne contient aucun élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ . On en déduit

$$\left\{ \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k \mid W_k \in \mathcal{Z}_k, \ 3 \leq k \leq 2n-3 \right\} \subseteq \mathcal{W}.$$

On démontre maintenant l'inclusion inverse. Soient un entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 2n-1$ , et  $W \in \mathcal{W}$  qui est  $\mathbb{C}^*$ -invariant. On définit les espaces  $W_k$  par  $u_k \in E_k$  tels que  $\sum_{1 \leq k \leq 2n-1} u_k \in W$ . On en déduit

$$W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} W_k.$$

Comme le sous-espace vectoriel  $E_1$  (resp.  $E_2, E_{2n-1}, E_{2n-2}$ ) contient un seul élément  $z_{p,q}$  tel que  $p+q=1$  (resp.  $p+q=2, 2n-1, 2n-2$ ) et comme  $W$  ne contient aucun élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ , alors  $W_1 = W_2 = W_{2n-1} = W_{2n-2} = 0$ . On obtient donc que

$$W = \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k.$$

Comme  $W$  ne contient aucun élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ , alors  $W_k$  ne contient aucun élément décomposable non nul de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ . Donc  $W_k \in \mathcal{Z}_k$  pour tout  $3 \leq k \leq 2n-3$  et on a

$$\mathcal{W} \subseteq \left\{ \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k \mid W_k \in \mathcal{Z}_k, \ 3 \leq k \leq 2n-3 \right\}.$$

2- Il suffit de choisir  $d_k \in E_k \setminus W_k$ , pour tout  $1 \leq k \leq 2n-1$ , et de considérer le sous-espace vectoriel de  $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$

$$D_W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} \mathbb{C}.d_k.$$

D'après la définition 3.1, on obtient la suite exacte recherchée. □

**3.5. Proposition.** (*Décomposition Clebsch-Gordan*). Soit  $U$  un espace vectoriel complexe de dimension 2. Alors il existe une  $SL_2(\mathbb{C})$ -décomposition irréductible de  $\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{S}^n U$

$$\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{S}^n U \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{S}^{2n-2i} U.$$

En particulier, on a

$$\bigwedge^2 (\mathcal{S}^n U) \simeq \mathcal{S}^{2(n-1)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-3)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-5)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-7)} U \oplus \dots$$

qui est  $SL_2(\mathbb{C})$ -isomorphisme.

*Démonstration.* Voir [17] pages 93-97. □

**3.6. Proposition.** *On utilise les mêmes notations de la remarque 3.3. Soient  $\beta = -\alpha$  et le sous-espace vectoriel*

$$W = \mathcal{S}^{2(n-3)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-5)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-7)} U \oplus \dots \subset \bigwedge^2 (\mathcal{S}^n U).$$

*Alors  $W$  est  $SL_2(\mathbb{C})$ -invariant et  $W \in \mathcal{W}$ . Le fibré de Tango  $F(W)$ , qui est défini par la suite exacte suivante*

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \mathcal{S}^{2(n-1)} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

*est  $SL_2(\mathbb{C})$ -invariant.*

*Démonstration.* Voir l'article de Cascini [4], proposition 2.1. □

**3.7. Proposition.** *On utilise les mêmes notations de la remarque 3.3. Soient  $i, n, \alpha, \gamma \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{Z}$  tels que  $n > 2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha \geq \beta$ ,  $\alpha + \beta \geq 0$  et  $\gamma + n\alpha + i(\beta - \alpha) > 0$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Soient  $g_0, \dots, g_n$  des formes homogènes sans zéro commun sur  $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  telles que*

$$\deg(g_i) = \gamma + n\alpha + i(\beta - \alpha), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

*Soient  $Q$  le fibré de quotient et  $F(W)$  le fibré de Tango sur  $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  pour  $W \in \mathcal{W}$  et  $D_W$  comme dans le théorème 3.4. Les fibrés  $Q$  et  $F(W)$  sont définis par les suites exactes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1) \xrightarrow{g} \mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

*où  $g$  est le morphisme canonique. Alors le fibré  $Q$  (resp.  $F(W)$ ) possède une image inversée généralisée  $Q_{\gamma, \alpha, \beta}$  (resp.  $F_{\gamma, \alpha, \beta}$ ) définie par*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \xrightarrow{g(-\gamma)} \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma, \alpha, \beta} \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma, \alpha, \beta}(-\gamma) \xrightarrow{\varpi_W(-2\gamma)} \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}_{\gamma, \alpha, \beta}(\gamma) \longrightarrow 0),$$

*où  $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\beta)$ , et  $\mathcal{F}_{\gamma, \alpha, \beta}(\gamma) := F_{\gamma, \alpha, \beta}(-2\gamma)$ ,  $\mathcal{Q}_{\gamma, \alpha, \beta} := Q_{\gamma, \alpha, \beta}(-\gamma)$ . La première classe de Chern du fibré  $\mathcal{F}_{\gamma, \alpha, \beta}$  est  $n(\beta + \alpha)(2n - 1 - (\frac{n+1}{2}))$ . On appelle le fibré  $\mathcal{Q}_{\gamma, \alpha, \beta}$  le fibré de quotient pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$ , provenant d'une image inverse généralisée sur  $\mathbb{P}^n$ . On appelle le fibré  $\mathcal{F}_{\gamma, \alpha, \beta}$  le fibré de Tango pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$ , provenant d'une image inverse généralisée sur  $\mathbb{P}^n$ .*



*Démonstration.* On considère l'application

$$\begin{aligned}\omega &:= (g_0, \dots, g_n) : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathcal{S}^n U \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (g_0(v), \dots, g_n(v)).\end{aligned}$$

On considère l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathcal{S}^n U$

$$\begin{aligned}\sigma &: \mathbb{C}^* \times \mathcal{S}^n U \longrightarrow \mathcal{S}^n U \\ (t, u) &\longmapsto t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot u\end{aligned}$$

qui est représentée par la matrice

$$t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^{n\alpha} & & & & 0 \\ & t^{n\alpha+(\beta-\alpha)} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & t^{n\alpha+(n-1)(\beta-\alpha)} & \\ & & & & t^{n\beta} \end{pmatrix} \in PGL(\mathcal{S}^n U).$$

On considère aussi l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  qui est la multiplication usuelle sur  $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\begin{aligned}T &: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (t, u) &\longmapsto t.u.\end{aligned}$$

Alors  $\omega$  est une  $\mathbb{C}^*$ -application par rapport à ces deux actions. L'action  $\sigma$  induit une action  $\bar{\sigma} \in PGL(\mathcal{S}^n U)$  de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  et l'action  $T$  induit une action triviale de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{P}^n$ . Donc la transformée de Horrocks 2.2 est

$$\mathbf{Iminvg} : \mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U), \bar{\sigma}) \longrightarrow \mathcal{FV}(\mathbb{P}^n),$$

où  $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U), \bar{\sigma})$  est la catégorie de fibrés vectoriels sur  $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  qui sont  $\mathbb{C}^*$ -invariants au-dessus de l'action  $\bar{\sigma}$  (resp.  $\mathcal{FV}(\mathbb{P}^n)$  est la catégorie de fibrés vectoriels sur  $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$  qui sont  $\mathbb{C}^*$ -invariants au-dessus de l'action  $T$ ). On considère le morphisme

$$g := {}^T\omega =: \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1) \longrightarrow \mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)},$$

avec  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1)$  et  $\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$  qui sont munis de l'action canonique  $\sigma(t)$ . Alors  $g$  est un  $\mathbb{C}^*$ -morphisme. Comme on a, pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\sigma(t).(x^{n-i}.y^i) = t^{n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma}.(x^{n-i}.y^i)$$

alors le sous-fibré  $(x^{n-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$  de  $\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant. On obtient

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)} \simeq (x^{n-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$$

qui est défini localement, pour tout  $v \in \mathcal{S}^n U$ , par

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((x^{n-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)})_v \simeq x^{n-i}.y^i.\mathbb{C} \\ a &\longmapsto ax^{n-i}.y^i.\end{aligned}$$

Donc on a un  $\mathbb{C}^*$ -isomorphisme

$$\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)} \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)}.$$

Alors on a un  $\mathbb{C}^*$ -morphisme

$$g := {}^T\omega =: \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)}.$$

On considère le morphisme

$$\varpi_W : Q(-1) \longrightarrow D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)},$$

avec  $D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$  et  $Q(-1)$  qui sont munis de l'action canonique  $\sigma(t)$ . Pour que le morphisme  $\varpi_W$  soit un  $\mathbb{C}^*$ -morphisme il faut avoir

$$(\varpi_W)_v(\sigma(t).v_1) = t^q \sigma(t).(\varpi_W)_v(v_1)$$

pour tout  $v, v_1 \in \mathcal{S}^n U$ ,  $q$  un entier et

$$(\varpi_W)_v : Q(-1)_v \longrightarrow (D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)})_v = D_W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} \mathbb{C}.d_k,$$

où  $d_k \in E_k \setminus W_k$ , pour tout  $1 \leq k \leq 2n-1$ , comme dans le théorème 3.4. Alors on obtient  $q = 0$ . Comme on a, pour tout  $t \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\sigma(t).(d_k) = t^{2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma}.(d_k),$$

alors le sous-fibré  $(d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$  de  $D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant. On a

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)} \simeq (d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$$

qui est défini localement, pour tout  $v \in \mathcal{S}^n U$ , par

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)})_v \simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)})_v \simeq d_k.\mathbb{C}.$$

$$a \longmapsto ad_k.$$

Donc on en déduit le  $\mathbb{C}^*$ -isomorphisme suivant

$$D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)} \simeq \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)},$$

et le  $\mathbb{C}^*$ -morphisme

$$\varpi_W : Q(-1) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)}.$$

Comme le fibré  $Q$  a une  $GL(\mathcal{S}^n U)$ -action alors il a une  $\mathbb{C}^*$ -action. Autrement dit, le fibré  $Q$  est  $\mathbb{C}^*$ -invariant au-dessus de l'action  $\sigma(t)$ . D'après la proposition 3.2, on obtient que

$$\sigma(t)^*F(W) \simeq F(W).$$

D'après la définition 2.2 et la proposition 2.3, on obtient

$$\mathbf{Iminvg}(Q(-1)) = Q_{\gamma,\alpha,\beta} \text{ et } \mathbf{Iminvg}(F(W)(1)) = F_{\gamma,\alpha,\beta}$$

et on a aussi

$$\mathbf{Iminvg}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Iminvg}(D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}) &\simeq \mathbf{Iminvg}\left(\bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)}\right) \\
&= \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha) + 2\gamma) := \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(2\gamma), \\
\mathbf{Iminvg}(\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}) &\simeq \mathbf{Iminvg}\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)}\right) \\
&= \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha) + \gamma) := \mathcal{S}^n \mathcal{U}(\gamma),
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\beta)$ . On en déduit les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha) + \gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \xrightarrow{\varpi_W} \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha) + 2\gamma) \longrightarrow F_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0.$$

Ces suites exactes s'écrivent également comme suit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \xrightarrow{g^{(-\gamma)}} \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha)) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma) \xrightarrow{\varpi_W^{(-2\gamma)}} \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha)) \longrightarrow \mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où  $\mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} := \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma)$ , et  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}(\gamma) := F_{\gamma,\alpha,\beta}(-2\gamma)$ .

□

**3.8. Remarque.** Le fibré  $\mathcal{F}_{\gamma,\alpha,-\alpha}$  pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, -\alpha$  est le fibré pondéré par les poids  $\gamma, \alpha$  de Cascini [4]. On va noter  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta}$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\gamma,\alpha,\beta}$ .

#### 4. Stabilité et déformation miniversale du fibré de Tango pondéré.

Nous allons démontrer que le fibré  $\mathcal{F}$  est stable et que les fibrés  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{F}$  sont invariants par rapport à une déformation miniversale. Nous allons aussi montrer que l'espace de Kuranishi du fibré  $\mathcal{F}$  est lisse au point correspondant du fibré  $\mathcal{F}$ .

**4.1. Proposition.** *Soit  $\mathcal{F}$  le fibré de Tango pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$ .*

1- *Si on a  $\gamma > 2n\alpha + (\beta - \alpha)$ , alors  $\mathcal{F}$  est stable.*

2- *Soit  $\gamma > n\alpha$ . Si  $\mathcal{F}$  est stable, alors on a  $\gamma > 2n\alpha + (\beta - \alpha)$ .*

*Démonstration.* Soient  $q$  un entier avec  $1 \leq q \leq n - 2$  et  $t \in \mathbb{Z}$  tels que  $(\bigwedge^q \mathcal{F})_{norm} = \bigwedge^q \mathcal{F}(t)$ . On obtient alors

$$\frac{c_1(\bigwedge^q \mathcal{F}(t))}{rg(\bigwedge^q \mathcal{F}(t))} \leq 0,$$

qui s'écrit également

$$t + c_1(\mathcal{F}) \frac{q}{n-1} \leq 0.$$

Donc on a

$$t \leq -\frac{n}{n-1}(\alpha + \beta)(2n-1 - (\frac{n+1}{2})) < (\alpha + \beta)(2-n) \leq 0.$$

1- De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

il en découle la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{q-1} \mathcal{S}^n \mathcal{U}(-\gamma + m) \longrightarrow \mathcal{S}^q \mathcal{S}^n \mathcal{U}(m) \longrightarrow \mathcal{S}^q \mathcal{Q}(m) \longrightarrow 0$$

qui nous donne  $h^i(\mathcal{S}^q \mathcal{Q}(m)) = 0$ , pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  et  $1 \leq i \leq n-2$ . De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{S}^q \mathcal{Q}(-2q\gamma + t) \longrightarrow \mathcal{S}^{q-1} \mathcal{Q} \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-\gamma(2q-1) + t) \\ &\longrightarrow \mathcal{S}^{q-2} \mathcal{Q} \otimes \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-\gamma(2q-2) + t) \xrightarrow{a_{q-2}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{a_2} \mathcal{Q} \otimes \bigwedge^{q-1} \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-\gamma(q+1) + t) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^q \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-q\gamma + t) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{F}(t) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En considérant  $A_j = \ker(a_j)$  pour  $j = 0, 1, \dots, q-2$ , on obtient alors  $h^i(A_0) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n+1-q$ . On a

$$\begin{aligned} q\gamma - t &> 2nq\alpha + q(\beta - \alpha) + (n-2)(\beta + \alpha) \geq 2nq\alpha + q(\beta - \alpha) \\ &\geq \max\{e \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(e) \subseteq \bigwedge^q \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}\} = 2nq\alpha + (\beta - \alpha) \frac{q(q+1)}{2}. \end{aligned}$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-q\gamma + t) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{F}(t) \longrightarrow 0,$$

on en déduit  $h^0(\bigwedge^q \mathcal{F}(t)) = 0$ . D'après le critère de Hoppe [11],  $\mathcal{F}$  est stable.

2- Supposons que  $\gamma \leq 2n\alpha + (\beta - \alpha)$ . On obtient

$$\gamma - t < 2n\alpha + (\beta - \alpha),$$

et on a aussi

$$2\gamma - t > 2n\alpha + (n - 2)(\beta + \alpha) \geq n\alpha.$$

Des suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-3\gamma + t) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U}(-2\gamma + t) \longrightarrow \mathcal{Q}(-2\gamma + t) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-2\gamma + t) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-\gamma + t) \longrightarrow \mathcal{F}(t) \longrightarrow 0,$$

on en déduit que  $h^0(\mathcal{Q}(-2\gamma + t)) = 0$  et  $h^0(\mathcal{F}(t)) = h^0(\mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(-\gamma + t)) \neq 0$ . Donc il existe un fibré en droite trivial dans  $\mathcal{F}(t)$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \hookrightarrow \mathcal{F}(t),$$

ce qui nous donne  $\frac{c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})}{rg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})} = 0 \geq \frac{c_1(\mathcal{F}(t))}{rg(\mathcal{F}(t))}$ . Donc  $\mathcal{F}$  n'est pas stable. □

**4.2. Théorème.** (Hartshorne, [10]). *Si  $E$  est un faisceau cohérent sur un schéma projectif  $X$  sur un corps de base  $K$  tel que  $hdE \leq 1$ , il existe un schéma  $Y = \text{Spec}(R)$  qui paramétrise les déformations miniversales de  $E$ , où  $R$  est une  $K$ -algèbre locale complète.*

*Démonstration.* Voir le théorème (19.1 [10]). □

**4.3. Théorème.** *Soit  $E$  un fibré vectoriel sur la variété algébrique  $\mathbb{P}^n$ . Il existe un espace de Kuranishi  $Kur(E)$  de  $E$  qui est une base de la déformation miniversale de  $E$  ( $Kur(E)$  paramétrise toutes les déformations miniversales de  $E$ ).*

*Démonstration.* Voir l'article de M. Kuranishi [18]. □

Soit  $e$  un point correspondant au fibré  $E$ . Alors l'espace  $Kur(E)$  est équipé d'une famille universelle et la fibre  $(Kur(E), e)$ , un espace topologique pointé, est unique à un automorphisme près.

**4.4. Lemme.** Soient  $\mathcal{Q}'$  et  $\mathcal{Q}''$  deux fibrés de quotient pondérés par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$  qui sont définis par les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \xrightarrow{q_1} \mathcal{Q}' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \xrightarrow{q_2} \mathcal{Q}'' \longrightarrow 0,$$

tels qu'il existe un morphisme  $\psi : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q}''$ . Alors il existe un morphisme  $\varphi : \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U}$  tel que  $q_2 \circ \varphi = \psi \circ q_1$ .

*Démonstration.* La démonstration de ce lemme est très similaire à celle du lemme 4.3 [2].  $\square$

**4.5. Lemme.** Soient  $f, f' \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma), \mathcal{S}^n \mathcal{U})$  deux morphismes. Alors  $f$  et  $f'$  donnent le même élément dans le schéma  $\text{Quot}_{\mathcal{S}^n \mathcal{U}/\mathbb{P}^n}$  si et seulement s'il existe un isomorphisme  $g \in \text{End}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma))$  tel que  $f = f' \circ g$ .

*Démonstration.* C'est la définition du schéma  $\text{Quot}_{\mathcal{S}^n \mathcal{U}/\mathbb{P}^n}$ .  $\square$

**4.6. Théorème.** Soit  $\mathcal{Q}_0$  un fibré de quotient pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$  qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \xrightarrow{x_0} \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_0 \longrightarrow 0$$

où  $x_0 \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma), \mathcal{S}^n \mathcal{U})$ . Alors chaque déformation miniversale du fibré  $\mathcal{Q}_0$  est encore un fibré de quotient pondéré sur  $\mathbb{P}^n$ . L'espace de Kuranishi de  $\mathcal{Q}_0$  est lisse au point correspondant de  $\mathcal{Q}_0$ .

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est très similaire à celle du théorème 4.5 [2].  $\square$

**4.7. Lemme.** Soit  $\mathcal{Q}$  un fibré de quotient pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$ . Soient  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$  des fibrés de Tango pondérés par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$  qui sont définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U} \xrightarrow{p_1} \mathcal{F}'(\gamma) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U} \xrightarrow{p_2} \mathcal{F}''(\gamma) \longrightarrow 0,$$

tels qu'il existe un morphisme  $\psi : \mathcal{F}'(\gamma) \longrightarrow \mathcal{F}''(\gamma)$ . Alors il existe un morphisme

$$\varphi : \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U},$$

tel que  $p_2 \circ \varphi = \psi \circ p_1$ .

*Démonstration.* De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \xrightarrow{p_2} \mathcal{F}''(\gamma) \longrightarrow 0,$$

il en découle la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{Q}(-\gamma)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \xrightarrow{p_2 \circ \bullet} \operatorname{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{F}''(\gamma)) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{Q}(-\gamma)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^* \longrightarrow \mathcal{S}^n\mathcal{U}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^* \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^* \longrightarrow 0$$

on en déduit

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{Q}(-\gamma)) = H^1(\mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^*) = 0.$$

Alors on obtient que

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \xrightarrow{p_2 \circ \bullet} \operatorname{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{F}''(\gamma)) \longrightarrow 0.$$

Comme le morphisme  $\psi \circ p_1 : \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}''(\gamma)$  appartient à  $\operatorname{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}, \mathcal{F}''(\gamma))$ , alors il existe un morphisme  $\varphi : \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}$  tel que  $p_2 \circ \varphi = \psi \circ p_1$ .

□

**4.8. Lemme.** Soit  $\mathcal{Q}$  un fibré de quotient pondéré sur  $\mathbb{P}^n$ . Soient  $f$  et  $f'$  deux morphismes dans  $\operatorname{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})$ . Alors les morphismes  $f$  et  $f'$  donnent le même élément dans  $\operatorname{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}/\mathbb{P}^n}$  si et seulement s'il existe un isomorphisme  $g \in \operatorname{End}(\mathcal{Q}(-\gamma))$  tel que  $f = f' \circ g$ .

*Démonstration.* C'est la définition du schéma  $\operatorname{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}/\mathbb{P}^n}$ .

□

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 4.1[4].

**4.9. Théorème.** Soient  $\mathcal{Q}$  le fibré de quotient pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$  et  $\mathcal{F}_0$  le fibré de Tango pondéré par les poids  $\gamma, \alpha, \beta$  sur  $\mathbb{P}^n$ . Les deux fibrés  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{F}_0$  sont définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \xrightarrow{f_0} \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}_0(\gamma) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

où  $f_0 \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})$ . Alors chaque déformation miniversale du fibré  $\mathcal{F}_0$  est encore un fibré de Tango pondéré sur  $\mathbb{P}^n$ . L'espace de Kuranishi de  $\mathcal{F}_0$  est lisse au point correspondant de  $\mathcal{F}_0$ .

*Démonstration.* Soient  $f_0 \in \text{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})$  et  $\mathcal{F}_0(\gamma) = \text{coker}(f_0)$  un fibré vectoriel quotient de  $\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}$  correspondant au morphisme  $f_0$ . Soit  $Y \subseteq \text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}/\mathbb{P}^n}$  un composant irréductible de  $\text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}/\mathbb{P}^n}$  tel que  $f_0 \in Y$ . Soient  $x \in \text{Kur}(\mathcal{Q})$  correspondant au fibré  $\mathcal{Q}$  et  $z_0 \in \text{Kur}(\mathcal{F}_0)$  correspondant au fibré  $\mathcal{F}_0$ .

$$\begin{array}{ccc} (Y, f_0) & \xrightarrow{\Psi} & (\text{Kur}\mathcal{Q}, x) \\ \downarrow \Phi & & \\ (\text{Kur}\mathcal{F}_0, z_0) & & \end{array}$$

D'après le théorème 4.6, pour le morphisme  $\Psi$ , on a

$$\dim_{f_0}(Y) = \dim_x(\text{Kur}(\mathcal{Q})) + \dim_{f_0}(\Psi^{-1}(x))$$

et  $\dim_x(\text{Kur}(\mathcal{Q})) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}))$ . La dimension de la fibre du morphisme  $\Psi$  est égale à  $h^0(\mathcal{Q}^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}))$ , donc on obtient

$$\dim_{f_0}(Y) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})) + h^0(\mathcal{Q}^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})).$$

Pour le morphisme  $\Phi$ , d'après le théorème 3.12 page 137 et le théorème 2.2 page 126 [25], on obtient

$$h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) \geq \dim_{z_0}(\text{Kur}(\mathcal{F}_0)) \geq \dim_{f_0}(Y) - \dim_{f_0}(\Phi^{-1}(z_0)).$$

Soit

$$Z = \{f_1 \in Y \mid \mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_0 \text{ où } \mathcal{F}_1 \text{ est le fibré correspondant à } f_1\}.$$

On obtient que

$$(\Phi^{-1}(z_0), f_0) \subseteq (Z, f_0) \text{ et } \dim_{f_0}((\Phi^{-1}(z_0), f_0)) \leq \dim_{f_0}((Z, f_0)).$$

On en déduit

$$\dim_{z_0}(\text{Kur}(\mathcal{F}_0)) \geq \dim_{f_0}(Y) - \dim_{f_0}((Z, f_0)).$$

Soit  $\Sigma = \{\sigma \in \text{End}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \mid \sigma.f_0 = f_0\}$ . D'après les lemmes 4.7 et 4.8, il en découle que

$$\dim_{f_0}(Z) = h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})) - \dim_{f_0}(\Sigma) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})).$$

En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{Q}^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \longrightarrow \text{End}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \xrightarrow{\bullet \circ f_0} H^0(\mathcal{Q}^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})$$

qui nous donne  $\dim_{f_0}(\Sigma) = h^0(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})$ . Donc on obtient que

$$\begin{aligned} \dim_{z_0}(\text{Kur}(\mathcal{F}_0)) &\geq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})) + h^0(\mathcal{Q}^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \\ &\quad - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})) + h^0(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}). \end{aligned}$$

De la suite exacte précédente de fibrés vectoriels, il s'ensuit que

$$\dim_{z_0}(\text{Kur}(\mathcal{F}_0)) \geq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})) + h^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}).$$



En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^* \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{Q}) \longrightarrow 0$$

et comme on a  $H^1(\mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^*) = H^2(\mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})^*) = 0$ , alors

$$H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})) = H^2(\mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q}).$$

En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$\dots \longrightarrow H^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})) \longrightarrow \dots$$

qui nous donne  $h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) \leq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q})) + h^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U})$ . Alors il en résulte que  $\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{F}_0)) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0))$  et que  $Kur(\mathcal{F}_0)$  est lisse en  $z_0$ . De plus on obtient

$$\dim_{z_0}(Kur(\mathcal{F}_0)) = \dim_{f_0}(Y) - \dim_{f_0}(\Phi^{-1}(z_0)).$$

D'après le théorème de la semi-continuité des fibres (12.8, page 288 [9]), on en déduit que  $\dim_{z_0}(Im(\Phi)) = \dim_{z_0}(Kur(\mathcal{F}_0))$  et que  $\Phi$  est surjectif. Cela implique que  $\mathcal{F}_0$  est invariant par rapport à une déformation miniversale.

□

## RÉFÉRENCES

- [1] Ancona, V. Ottaviani, G. *3- bundles on  $\mathbb{P}^5$* . (1993).
- [2] Bahtiti, M. *Fibré vectoriel de 0-corrélation pondéré sur l'espace  $\mathbb{P}^{2n+1}$* . arXiv:1508.01776. 2015.
- [3] Brinzănescu, V. *Holomorphic vector bundles over compact complex surfaces*. Lect. Notes in Math. 1624. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [4] Cascini, P. *Weighted Tango bundles on  $\mathbb{P}^n$  and their moduli spaces*. Forum Math. 13 (2001), 251-260.
- [5] Ein, L. *Generalized null correlation bundles*. Nagoya Math. J.Vol. HI (1988), 13-24.
- [6] Fulton, W. *Intersection theory*. Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [7] Fulton, M. Harris, J. *Representation theory, a first course*, Graduate Text in Math. 133, Springer (1991).
- [8] Jaczewski, K. Szurek, M. Wisniewski, J. *Geometry of the Tango bundle*. Teubner Texte zur Math. 92 (1986), 177-185.
- [9] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*. Gradua.Texte in Math. 52. Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [10] Hartshorne, R. *Deformation theory*. Gradua.Texte in Math. 257. Springer New York (2010).
- [11] Hoppe, H.J. *Stable generischer spaltungstyp und zweite Chernklasse stabiler Vektorraumbundel vom Rang 4 auf  $P^4$* , Math. Zeitschrift bf 187 (1984), 345-360.
- [12] Horrocks, G. *Examples of rank three vector bundles on five-dimensional projective space*. J. London Math. Soc. 18 (1978),15-27.
- [13] Horrocks, G. *Construction of bundles on  $\mathbb{P}^n$* . In A. Douady and J-L. Verdier, editors, Les équations de Yang-Mills, volume 71-72 of Astérisque, pages 197-203, 1980.
- [14] Horrocks, G. *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*. Proc. London. Math. Soc. 14 (1964), 689-713.
- [15] Husemoller, D. *Fibre bundles*. Third edition. Grad. Texts in Math. 20. Springer-Verlag, New York (1994).
- [16] Huybrecht, D. lehn, M. *The geometry of moduli space of sheaves*. Seco. edition. Cambr.Univ.Press. 2010.
- [17] Kraft, H. Procesi, C. *Classical invariant theory a primer*. <http://jones.math.unibas.ch/kraft/Papers/KP-Primer.pdf>.
- [18] Kuranishi, M. *New proof for the existence of locally complete families of complex structures*. Proceedings of the Conference on Complex Analysis 1965, pp 142-154.
- [19] Le Potier, J. *Lectures on vector bundles*. Cambridge Studies in Adv. Math. 54. Cambridge University Press (1997).
- [20] Mumford, D. Fogarty, J. Kirwan, F. *Geometric invariant theory*. Ergebn. der. Mathema. und. ihrer. Grenz. 34. Springer-Heidelberg, 1994.
- [21] Okonek, C. Schneider, M. Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces with an appendix by S. I. Gelfand*. Progress in Math. 3. Birkhuser (1980).
- [22] Okonek, C. Spindler, H. *Mathematical instanton bundles on  $P^{2n+1}$* , J. Reine Angew. Math., 364 (1986), pp. 35-50.
- [23] Tango, H. *An exemple of indecomposable vector bundle of rank n-1 on  $\mathbb{P}^n$* . J. Math.Kyoto Univ. 16, (1976), 137-141.
- [24] Tango, H. *On morphisms from projective space  $\mathbb{P}^n$  to the Grassman variety  $Gr(n, d)$* . Jour. Math. Kyoto Univ., 16(1): 201-207, 1976.
- [25] Qing, L. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford University Press, New York (2002).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, CASE 247, 4 PLACE JUSSIEU,  
F-75252 PARIS, FRANCE

E-mail address: mohamed.bahtiti@imj-prg.fr